

Δευτέρα 14:00-16:00

Παρασκευή 16:00-19:00

Δευτέρα.

Φύλλο 7

Άσκηση 5: Δίνονται τα σημεία $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,1)$, $\Delta(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $E(1,2,3)$.
Στην περίπτωση που οι τετράδες $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ και $\{A, B, \Gamma, E\}$ ορίσουν
σφαίρα, να βρεθεί αυτή.

Λύση: Πρέπει να ελέγξουμε αν οι τετράδες δεν είναι στο ίδιο επίπεδο.

Ας βρούμε το επίπεδο που διέρχεται από τα A, B, Γ .

Το επίπεδο αυτό έχει εξίσωση $\boxed{x+y+z=1} \quad (1)$.

Παρατηρούμε ότι το $\Delta(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ πληρεί την εξίσωση του (1). Άρα
 $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ απεικνύεται.

Παρατηρούμε ότι το $E(1,2,3)$ δεν πληρεί την εξίσωση του (1). Άρα
 $\{A, B, \Gamma, E\}$ μν απεικνύεται.

Άρα υπάρχει μοναδική σφαίρα που διέρχεται από αυτά τα σημεία.

Ας βρούμε την εξίσωση:

2ος τρόπος:

$$O = \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 1+4+9 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{αποτελεσμέτες } E \\ \rightarrow \text{αποτελεσμέτες } \Delta \\ \rightarrow -11- \quad B \\ \rightarrow -11- \quad \Gamma \end{matrix}$$

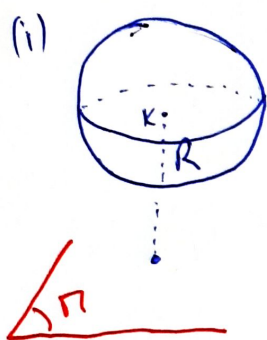
Η εξίσωση της σφαίρας που ζητούμε είναι $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.
Αφού τα σημεία $\{A, B, \Gamma, E\}$ επαληθεύουν την εξίσωση, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow & \begin{cases} 1 + \alpha + \delta = 0 \\ 1 + \beta + \delta = 0 \\ 1 + \gamma + \delta = 0 \\ 14 + \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases} \\
 B \rightarrow & \\
 \Gamma \rightarrow & \\
 E \rightarrow & \\
 \Rightarrow & \begin{cases} \alpha = -1 - \delta \\ \beta = -1 - \delta \\ \gamma = -1 - \delta \\ 14 - 1 - \delta - 2 - 2\delta - 3 - 3\delta + \delta = 0 \end{cases} \\
 & \begin{aligned} & \Leftrightarrow \alpha = -1 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5} \\ & \beta = -1 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5} \\ & \gamma = -1 + \frac{8}{5} = \frac{3}{5} \\ & -5\delta = 8 \\ & \Leftrightarrow \delta = -\frac{8}{5} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

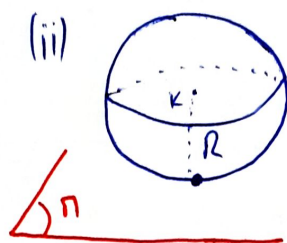
Σχέσεις Σφαίρας - Ειλεδου

Δίνεται η σφαίρα (Σ) με κέντρο $K(\alpha, \beta, \gamma)$ και ακτίνα $R > 0$. Δηλαδή

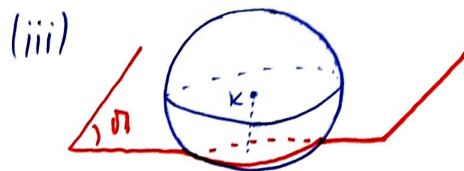
$$(\Sigma): (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \quad \text{και το ειλεδο } (\Pi): Ax + By + Cz + D = 0.$$



(Καυένα κοινό σημείο)



(Ένα κοινό σημείο)



(Πολλά κοινά σημεία)
κύκλος

Η απόσταση του κέντρου $K(\alpha, \beta, \gamma)$ από το ειλεδο (Π) είναι.

$$d(K, \Pi) = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(i) Εάν $d(K, \Pi) > R \Rightarrow$ δεν υπάρχει τομή.

(ii) Εάν $d(K, \Pi) = R \Rightarrow$ η τομή (Σ) και (Π) είναι ένα σημείο.

Σε αυτή την περίπτωση το (Π) λέγεται εφαπτόμενο ειλεδο.

(iii) Εάν $d(K, \Pi) < R \Rightarrow$ η τομή (Σ) και (Π) είναι κύκλος.

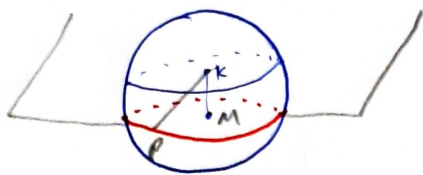
Ερώτημα: Δίνεται σφαίρα $(\Sigma): (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ και ειλεδο $(\Pi): Ax + By + Cz + D = 0$. ① Ποιο είναι το εφαπτόμενο ειλεδο της (Σ) σε ένα σημείο $P \in (\Sigma)$. ② Εάν (Σ) και (Π) τέμνονται, να βρούμε κέντρο και ακτίνα του κύκλου.

①

Τομή σφαίρας με ελπίδο

Ας υποθέσουμε ότι $(\Sigma): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ τέμνει το ελπίδο

$$(\Pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0.$$



Σε αυτή την περίπτωση $d(K, \Pi) < R$.

Έστω $P \in \Sigma \cap \Pi$ και M η ορθογώνια προβολή του K στο ελπίδο Π .

Τότε το $\triangle PKM$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο. Από πυθαγόρειο θεώρημα

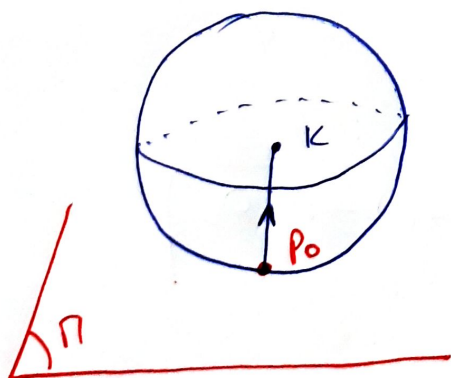
$$\{d(P, M)\}^2 = \{d(P, K)\}^2 - \{d(K, M)\}^2 \Rightarrow d(P, M) = \sqrt{R^2 - \{d(K, M)\}^2}.$$

Άρα η τομή $\Sigma \cap \Pi$ είναι κύκλος με κέντρο το σημείο M και

ακτίνα $r = \sqrt{R^2 - \{d(K, M)\}^2}.$

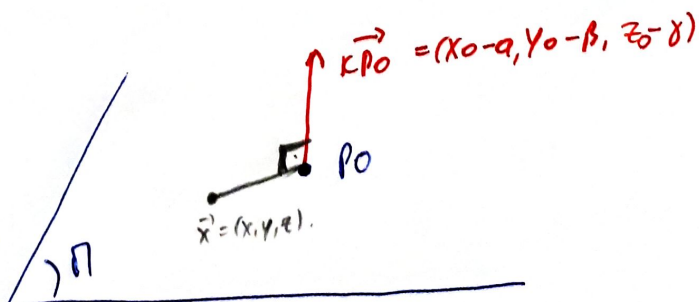
② Εξίσωση εφαπτόμενου ελπίδου.

Έστω ότι έχουμε την σφαίρα $(\Sigma): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ και $P_0(x_0, y_0, z_0)$ σημείο της (Σ) . Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση του εφαπτόμενου ελπίδου της σφαίρας ως σημείο P_0 .



Το διάνυσμα $\vec{KP_0} = (x_0 - a, y_0 - b, z_0 - \gamma)$ είναι κάθετο στο ελπίδο που ζητάμε

Έστω $\vec{x} = (x, y, z)$ είναι τυχαίο σημείο στο ελπίδο $\Rightarrow \vec{x} - \vec{OP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ είναι εφαπτόμενο στο ελπίδο $\Rightarrow$

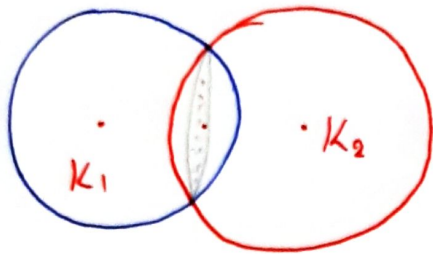


③

Φύλλο 7

Άσκηση 4: Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 34 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$



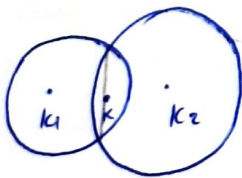
Λύση: Ας βρούμε το κέντρο και την ακτίνα της σφαίρας.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z - 34 = x^2 \\ &\quad + y^2 - 2y + 1 - 1 \\ &\quad + z^2 - 2z + 1 - 1 \\ &\quad - 34. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 36$$

η (Σ_1) έχει κέντρο $K_1(0,1,1)$ και ακτίνα 6.

η (Σ_2) έχει κέντρο $K_2(1,1,0)$ και ακτίνα 5.



Η εξίσωση (K) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 34 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 23 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 34 \quad (\Sigma_1) \\ 2x - 2z - 11 = 0 \quad (\Pi). \end{cases}$$

Άσκηση 3

Ν.δ.ο. οι ελλαιώτες
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

ορίλων κώλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Λύση: Ας βρούμε κέντρο και ακτίνα της σφαίρας.

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20.$$

$$0 = \boxed{x^2 - 6x + 9} - 9$$

$$\boxed{y^2 + 2y + 1} - 1$$

$$\boxed{z^2 - 4z + 4} - 4$$

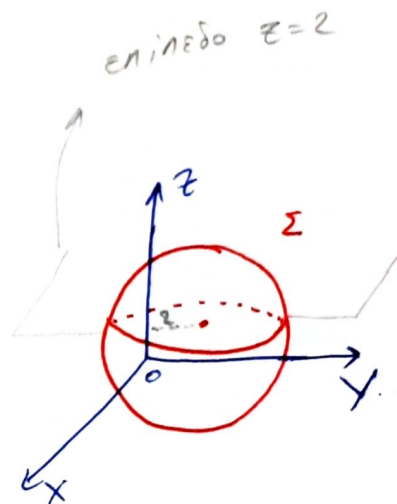
$$-20$$

$$\Rightarrow \boxed{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 34}$$

Άρα κέντρο $K(3, -1, 2)$ και ακτίνα $\sqrt{34}$.

Επειδή το κέντρο K ανήκα στο επίπεδο (π) .

$\Rightarrow$ ο κώλος έχει κέντρο το K και ακτίνα $\sqrt{34}$.



$$\Rightarrow 0 = \langle \vec{x} - \vec{o}, \vec{r}_0 \rangle = (x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - \beta) + (z - z_0)(z_0 - \gamma)$$

Ας το γράψουμε σε καλύτερη μορφή.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 &= (x - a + a - x_0)(x_0 - a) + (y - \beta + \beta - y_0)(y_0 - \beta) + (z - \gamma + \gamma - z_0)(z_0 - \gamma) \\ &= (x - a)(x_0 - a) + (y - \beta)(y_0 - \beta) + (z - \gamma)(z_0 - \gamma) - \underbrace{(x_0 - a)^2 - (y_0 - \beta)^2 - (z_0 - \gamma)^2}_{-R^2} \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: Το εφαπτόμενο επίπεδο έχει εξίσωση

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - \beta)(y_0 - \beta) + (z - \gamma)(z_0 - \gamma) = R^2$$

Παρατήρηση: Ας υποθέσουμε ότι η σφαίρα (Σ) δίνεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$.

Τότε έχουμε ισοδύναμα ότι

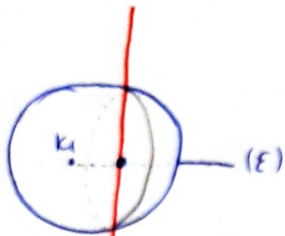
$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = R^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}$$

Επομένως το εφαπτόμενο επίπεδο στο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ είναι

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)\left(x_0 + \frac{A}{2}\right) + \left(y + \frac{B}{2}\right)\left(y_0 + \frac{B}{2}\right) + \left(z + \frac{C}{2}\right)\left(z_0 + \frac{C}{2}\right) = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}$$

Μετά από πράξεις (...).

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + \frac{A}{2}(x + x_0) + \frac{B}{2}(y + y_0) + \frac{C}{2}(z + z_0) + D = 0.$$



Για να βρούμε το κέντρο του κύκλου, πρώτα βρίσκουμε την ευθεία (E) που διέρχεται από το K_1 και τέμνει κάθετα το επίπεδο $2x - 2z - 11 = 0$.

$$\vec{n} = (1, 0, -1) \perp \Pi$$

Η εξίσωση είναι
$$\begin{cases} x = 0 + 1t \\ y = 1 + 0t \\ z = 1 + (-1)t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Το κέντρο του κύκλου είναι η τομή της (E) με το επίπεδο (Π).

Έτσι έχουμε το σύστημα
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \\ 2x - 2z - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{4} \\ y = 1 \\ z = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

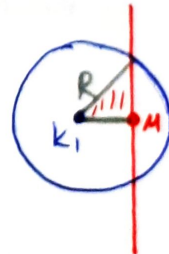
Το κέντρο του κύκλου είναι $M(\frac{13}{4}, 1, -\frac{9}{4})$.

Από πυθαγόρειο θεώρημα $R^2 = r^2 + \|K, M\|^2$

$$r = \sqrt{R^2 - \|K, M\|^2}$$

$$r = \sqrt{36 - \|K, M\|^2}$$

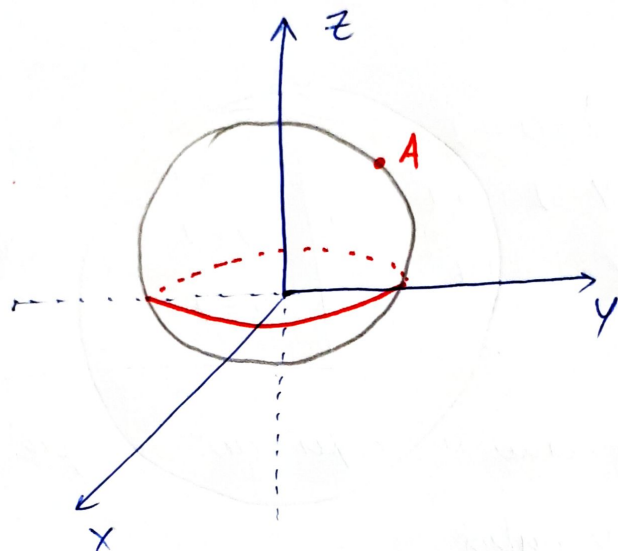
$$r = \dots$$



$$\|K, M\|^2 = \dots$$

Άσκηση 7 Μια σφαίρα διέρχεται από το σημείο $A(8, 15, 10)$ και τέμνει το Oxy επίπεδο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας $R=7$. Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας.

Λύση:



Αρκεί να βρούμε 3 σημεία του κύβου με κέντρο το $O(0,0,0)$ και ακτίνα $r=7$.
(με το A έχουμε 4 σημεία.)

Έχουμε $P_1(7, 0, 0)$, $P_2(0, 7, 0)$, $P_3(0, -7, 0)$.

Η σφαίρα που ζητάμε είναι εκείνη που διέρχεται από τα σημεία A, P_1, P_2, P_3

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 8^2+15^2+10^2 & 8 & 15 & 10 & 1 \\ 7^2+0^2+0^2 & 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0^2+7^2+0^2 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0^2+7^2+0^2 & 0 & -7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

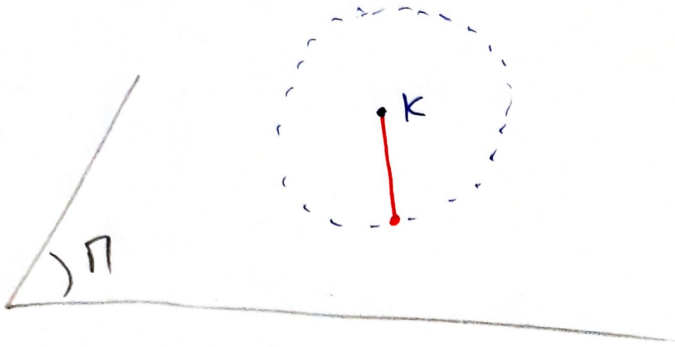
Άσκηση 8 Να βρεθεί σφαίρα ομόκεντρη της $x^2+y^2+z^2-4y+8z=5$ και εφαπτόμενη στο επίπεδο $4x+3y=11$.

Λύση: Ας βρούμε το κέντρο της: $0 = x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 8z - 5$

$$= x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 + z^2 + 8z + 16 - 16 - 5$$

$$= x^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 - 25$$

Κέντρο της σφαίρας που ζητάμε είναι $K(0, 2, -4)$



Η ακτίνα της σφαίρας
ισούται με την απόσταση
του K από το (Π) .

$$\text{Άρα } d(K, \Pi) = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$d(K, \Pi) = \frac{5}{5} = 1.$$

Άσκηση 9 Δίνεται η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z = 21$.
και η ευθεία $\vec{x} = (2, 3, 2) + t(1, 0, -1)$.

Να βρεθούν τα αμφία τομής της σφαίρας με την
ευθεία και τα εφαπτόμενα επίπεδα της σφαίρας
στα αμφία τομής.

